Eine Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung.

Von J. SZÉP und L. RÉDEI in Szeged.

Bezeichne G eine Gruppe mit Doppelkettensatz für Normalteiler. Wir nennen

$$G = N_1 N_2 \ldots N_n \tag{1}$$

eine normale Zerlegung von G, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Alle N_i sind Normalteiler von G.
b) Kein N_i läßt sich in (1) streichen.
c) Kein N_i ist ein Produkt von seinen zwei echten Normalteilern.

Im Falle einer normalen Zerlegung (1) setzen wir

$$D_{ik} = N_i \cap N_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

$$D = \prod_{i \neq k} D_{ik}. \tag{3}$$

Wir nennen D den *Kern* der normalen Zerlegung (1). Es ist klar, daß die normale Zerlegung die Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung ist, und zwar ist die normale Zerlegung (1) dann und nur dann eine Remaksche Zerlegung, wenn $D = 1$ ist. Es handelt sich bei uns um eine wirkliche Verallgemeinerung, wie das das Beispiel der Quaternionengruppe zeigt, die nämlich das Produkt von irgendzwei verschiedenen (zyklischen) Untergruppen vierter Ordnung ist.

Im folgenden werden wir den auf die Remakschen Zerlegungen beziehenden wohlbekannten Satz von KRULL—SCHMIDT[1]) für die normalen Zerlegungen verallgemeinern. Wir bemerken aber im voraus, daß wir nur über zwei solche normalen Zerlegungen eine Aussage bekommen werden, die einen gemeinsamen Kern haben. Die Frage konnten wir nicht untersuchen, welche (normalen) Untergruppen von G überhaupt als Kern einer normalen Zerlegung auftreten können.

---

[1]) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig, 1937), S. 79.

Satz. *Sind $G = N_1 \dots N_n = N'_1 \dots N'_{n'}$ zwei normale Zerlegungen von G mit demselben Kern D, so ist $n = n'$ und nach passender Umnumerierung der N'_i ist $N_i D/D$ zentral isomorph mit $N'_i D/D$ in G/D $(i = 1, \dots, n)$, ferner gelten die normalen Zerlegungen $G = N_1 \dots N_i N'_{i+1} \dots N'_n$.*[2]

Dem Beweis schicken wir die folgenden voraus.

1. Da offenbar

$$N_1 \dots N_{i-1} D N_{i+1} \dots N_n = N_1 \dots N_{i-1} N_{i+1} \dots N_n$$

ist, so gilt

$$G \neq N_1 \dots N_{i-1} D N_{i+1} \dots N_n.$$

2. Kein N_i ist in D enthalten. Dies folgt aus 1.

3. Wir setzen

$$D_i^* = N_i \cap D$$

und zeigen, daß die N_i/D_i^* direkt unzerlegbar sind. Da nämlich aus jeder direkten Zerlegung $N_i/D_i^* = M_i/D_i^* \times M'_i/D_i^*$ die Zerlegung $N_i = M_i M'_i$ folgt, so sieht man hieraus die Richtigkeit der Behauptung ein.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz wie folgt.

Wir setzen (vgl. 2)

$$\bar{N}_i = N_i D \neq D \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Offenbar gilt

$$G/D = \bar{N}_1/D \times \dots \times \bar{N}_n/D. \tag{4}$$

Da die Isomorphie

$$\bar{N}_i/D \approx N_i/D_i^*$$

gilt, so sind (wegen 3) die Faktoren in (4) direkt unzerlegbar. Das bedeutet, daß (4) eine Remaksche Zerlegung von G/D ist.

Hieraus folgt die Richtigkeit unseres Satzes mit Anwendung des Satzes von KRULL—SCHMIDT.

(Eingegangen am 16. Juni 1953.)

[2] Wir wissen nicht, ob auch die letzteren normalen Zerlegungen den Kern D haben. Selbstverständlich behält unser Satz seine Gültigkeit auch für Operatorgruppen. Auch sieht man, daß der Fall $D = 1$ eben der Satz von KRULL—SCHMIDT ist.